DIRECTION DE LA METEOROLOGIE NATIONALE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1991 D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES (I) DUREE : 3 heures COEFFICIENT : 2

La notation prendra en compte la rigueur et la clarté des raisonnements et explications, ainsi que le soin apporté à la présentation.

- I -

1) a étant un réel donné, soit f une fonction réelle définie et intégrable sur [a,x], pour tout x ≥ a. Montrer que s'il existe un réel $\alpha \geq a$ et une fonction g : x ⟶ g (x) positive intégrable sur [α, + ∞[, vérifiant, pour tout $x \geq \alpha$, $|f(x)| \leq g(x)$, alors l'intégrale : $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est absolument convergente, et que, d'autre part $\left| \int_\alpha^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_\alpha^{+\infty} g(x)dx$

2) Après avoir étudié, en fonction de la valeur du paramètre m, la convergence de l'intégrale : $\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x^m}\,dx$ ($\alpha > \sup(a, 0)$)

démontrer que s'il existe $m > 1$ tel que $\lim_{x \to +\infty} x^m f(x) = 0$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est absolument convergente.

3) Démontrer que l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ est absolument convergente.

4) Soit P un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes x'ox; y'oy. Pour tout R > o, on désigne par K_R le carré défini dans P par : $x \in [0, R]$ et $y \in [0,R]$ et par D_R le "quart de disque " défini par : $x \geq o$, $y \geq o$ et $x^2 + y^2 \leq R^2$.

On pose $\iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = A(R)$ et $\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = B(R)$

Montrer que, pour tout R > o ; $B(R) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})$ et que A (R) et B (R) vérifient la double inégalité $B(R) \leq A(R) \leq B(R\sqrt{2})$.

En déduire la limite de A (R) lorsque R tend vers l'infini.

5) Montrer alors que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

A SUIVRE

- II -

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$ dont on désignera la valeur par I_n.

Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre I_n et I_{n+2}

2) Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1}. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur J_n de l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{y^{2p}}{(2p)!} = \phi_n(y)$$

Etudier la convergence, pour tout $t \in \mathbb{R}$, des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \phi_n(tx)\, dx \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx)\, dx.$$

Ainsi est définie sur $\mathbb{R}$ la fonction h par $h(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx)\, dx$

4) Soit (h_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$h_n(t) = \int_0^{n} e^{-x^2} \cos(tx)\, dx$. Montrer la convergence uniforme de la suite (h_n) vers h sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$. En déduire que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.

5) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| \phi_n(y) - \cos y \right| \leq \frac{|y|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

6) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \phi_n(tx)\, dx$ et en déduire la valeur h(t).

Tournez la page S.V.P.

- III -

Soit E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$, et telles que l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f^2(x)\,dx$ soit convergente.

1) Montrer que, si f et g sont deux éléments de E, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,e^{-x^2}\,dx$ est absolument convergente, et établir l'inégalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\,g(x)|\,e^{-x^2}\,dx \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} [f^2(x)+g^2(x)]\,e^{-x^2}\,dx$$

En déduire que la loi d'addition des fonctions et la loi de multiplication d'une fonction par un scalaire réel font de E un espace vectoriel sur le corps des réels.

2) Vérifier qu'en associant à tout couple (f,g) d'éléments de E le nombre $\langle f.g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,e^{-x^2}\,dx$ on définit un produit scalaire euclidien sur E. La norme de tout élément f de E est alors définie par

$$\|f\| = \sqrt{\langle f.f\rangle}$$

3) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n: $x \longrightarrow f_n(x) = \cos nx$ est un élément de E. Calculer, pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, le produit scalaire $\langle f_m\ f_n\rangle$. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\|f_n\|$.

4) Soit U la fonction $x \longrightarrow U(x) = e^{-x^2}$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction P_n: $x \longrightarrow e^{x^2} U^{(n)}(x)$ (où $U^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de U) est une fonction polynôme dont on précisera le degré. Calculer le coefficient du terme de plus haut degré en x dans $P_n(x)$.

5) Calculer, pour tout couple (n, k) d'entiers naturels tels que $n \geq 1$ l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P_n(x)\,x^k\,dx$ (on envisagera les 2 éventualités $k<n$ et $k \geq n$).

6) On étend à $\mathbb{N}$ la suite des fonctions polynomiales P_n, en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_0(x) = 1$. Montrer que la suite (P_n) est une suite d'éléments de E orthogonale, et calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|P_n\|^2$.

A SUIVRE

- IV -

1) Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales d'une variable réelle, à coefficients réels. Montrer qu'en associant à toute fonction $y \in \mathcal{P}$ la fonction $x \longrightarrow y''(x) - 2x\,y'(x)$, on définit un endomorphisme D de $\mathcal{P}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ constitué par les fonctions polynomiales de degré $\leq n$.

Montrer que les fonctions $e_k : x \longrightarrow e_k(x) = x^k$ correspondant à $k = 0, 1, \ldots, n$ constituent une base B_n de $\mathcal{P}_n$. Ecrire la matrice Δ_n définissant, dans cette base, la restriction de l'endomorphisme D à $\mathcal{P}_n$, que l'on désignera par D_n.

3) Trouver les valeurs propres de D_n. En déduire les valeurs propres de D, et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation différentielle :

(E_n) $y'' - 2x\,y' + 2n\,y = 0$ admet des solutions polynomiales, dont on précisera le degré et la parité.

4) Soit (m, n) un couple d'entiers naturels tels que $m \neq n$; y_m étant une solution polynomiale de (E_m) et y_n une solution polynomiale de (E_n), trouver une primitive dans $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longrightarrow 2(m-n)e^{-x^2} y_m(x)y_n(x)$.

Montrer alors que y_m et y_n sont deux éléments orthogonaux de l'espace vectoriel E défini dans III.

5) Trouver la solution générale $u : x \longrightarrow u(x)$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $u' + 2xu = 0$. Vérifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $V = U^{(n)}$, dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $U : x \longrightarrow U(x) = e^{-x^2}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $V'' + 2xV' + 2(n+1)V = 0$.

6) Montrer, grâce à un changement de fonction inconnue dans cette dernière équation différentielle, que l'ensemble des solutions polynomiales de l'équation différentielle (E_n) est la droite vectorielle de $\mathcal{P}$ engendrée par la fonction P_n définie dans III 4).

FIN